Corso Zero
di Matematica
CdL Scienze Biologiche

Lezione 5

Esponenziale e Logaritmo

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

se $n \in \mathbb{N}$ $\quad a^n = \underbrace{a \cdots\cdots a}_{n\text{-volte}}$

se $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0 \Rightarrow a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$

$\Rightarrow a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

(a^{-n} ha senso poiché la potenza è naturale) se $x \in \mathbb{Q}$ con $x = \frac{n}{m}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ $m \neq 0$

$$\Rightarrow a^x = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

Infine, se $x \in \mathbb{R}$, $x = M{,}c_1 c_2 c_3 \ldots\ldots$

si considerano

numeri in $\mathbb{Q}$

$$\left.\begin{array}{l} a^{M} \\ a^{M{,}c_1} \\ a^{M{,}c_1 c_2} \\ \vdots \end{array}\right\}$$

Nota che l'esponente è un numero razionale

si prova che "definitivamente" questi numeri hanno stessa parte intera, stessa prima cifra decimale, stessa seconda cifra decimale e ...

Quindi si costruisce l'operazione a^x

Proprietà:

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

(2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

(3) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

(5) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

(6) $\quad a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Monotonia:

se $a > 1$: $\quad a^x \le a^y \iff x \le y$

se $0 < a < 1$: $\quad a^x \le a^y \iff x \ge y$

Nota: l'esponenziale a^x è definita per $a > 0$ (non prendiamo $a = 0$ perché rischiamo di avere 0^0 = nessun senso) mentre a^x non ha alcun campo di esistenza (ossia l'operazione a^x ha senso $\forall x \in \mathbb{R}$)

Si prova che l'operazione a^x ammette

Operazione inversa se $a > 0$, $a \neq 1$

Teorema Sia $a \in \mathbb{R}$ $a \neq 1$ - $a > 0$

e $b > 0$ - Allora l'equazione

nell'incognita x:

$$a^x = b$$

ammette una ed una sola soluzione

$x \in \mathbb{R}$, definita come

$$\boxed{x = \log_a b}$$

Nota Anche l'operazione $\log_a$ ha senso per base $a>0 \quad a\neq 1$ e $\boxed{b>0}$

Essendo $x=\log_a b$ è soluzione di $a^x=b$

sostituendo otteniamo

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

In particolare: ogni numero positivo $y>0$ può sempre scriversi come esponenziale di un altro numero

$$\boxed{y = a^{\log_a y}} \qquad (1)$$

Analogamente

se $b = \log_a a^x \implies$

$$a^b = a^{\log_a a^x} \overset{(1)}{=} a^x$$

$$\implies b = x$$

ossia, ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ può sempre scriversi come il $\log_a$ di un altro numero

$$\forall x \in \mathbb{R} \implies \boxed{x = \log_a a^x} \quad (2)$$

<u>Proprietà</u>:

(1) $\log_a 1 = 0$ $\quad \forall a>0 \quad a \neq 1$

(2) $\log_a a = 1$

(3) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

(4) $\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$

(5) $\boxed{\log_a b^c = c \cdot \log_a b}$

(6) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (cambiamento di base)

Monotonia :

se $a > 1$ $\qquad \log_a x \leq \log_a y \iff x \leq y$

se $0<a<1$ $\quad \log_a x \leq \log_a y \iff x \geq y$

<u>Nota</u> l'operazione $\log_a x$

ha invece un <u>campo</u> di <u>esistenza</u>:

essa è definita solo per numeri

$$\boxed{x > 0}$$

<u>Esempio</u>

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x < 1$$

<u>alto numero</u>

ogni $z > 0$ $\quad z = a^{(\log_a z)}$

$$1 = \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{4}} 1} = \left(\frac{1}{4}\right)^0$$

Riscriviamo la disequazione come

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x < \left(\frac{1}{4}\right)^0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x > 0$$

Sol $\quad]0, +\infty[$

Esempio

$$3^{|x|-1} > \left(\frac{1}{\ldots}\right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{\ }{3}\right)$$

Ricorda $n \in \mathbb{Z}$ $n<0$ $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{3^2}} = 3^2$$

ma anche : $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \left(3^{-1}\right)^{-2}$

$$= 3^{(-1)\cdot(-2)} = 3^2$$

Riscrivo la disequazione

$$3^{|x|-1} > 3^2$$

$$\iff \quad |x| - 1 \geq 2$$

$$\begin{cases} \text{se } x \geq 0 & x - 1 \geq 2 \quad (x \geq 3) \quad \text{OK} \\ \text{se } x < 0 & -x - 1 \geq 2 \quad (x \leq -3) \quad \text{OK} \end{cases}$$

Sol $\,]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

Esempio

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left|\frac{x^2 - x}{x+2}\right|} \geq \frac{1}{8}$$

CE $x \neq -2$ $\qquad \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \frac{1^3}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

Riscrivo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\left|\frac{x^2-x}{x+2}\right|} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\iff \boxed{\left|\frac{x^2-x}{x+2}\right| \leq 3}$$

Domanda per quali $x \in \mathbb{R}$ $x \neq -2$

$$\frac{x^2-x}{} \geq 0 \quad ?$$

$x+2$

Segni concordi!

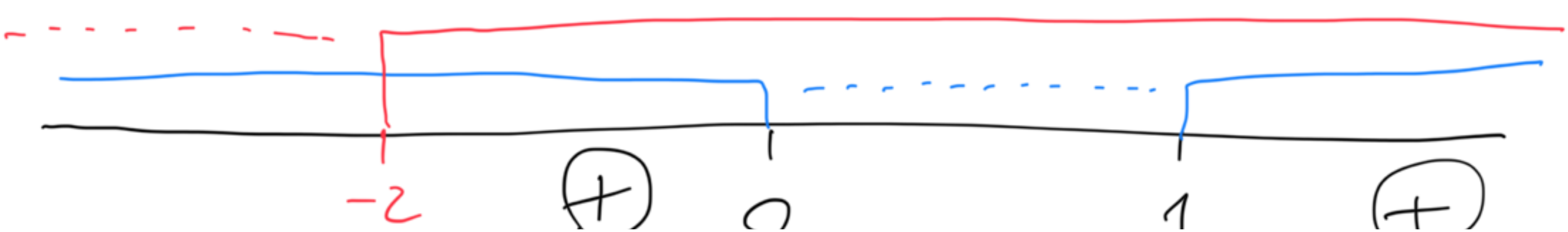
segno N : $x^2 - x \geq 0$

Sol $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$

Segno D : $x+2 > 0 \iff x > -2$

Sol $]-2, +\infty[$

Graficamente :



$$\frac{x^2-x}{x+2} \geq 0 \iff x \in \,]-2,0] \cup [1,+\infty[$$

Quindi se $x \in \,]-2,0] \cup [1,+\infty[$

la diseq. iniziale si scrive

$$\frac{x^2-x}{x+2} \leq 3$$

$$\frac{x^2-x}{x+2} - 3 \leq 0$$

$$\frac{x^2-x-3(x+2)}{x+2} \leq 0$$

discord.

$$\frac{x^2-4x-6}{x+2} \le 0$$

Segno N: $\boxed{x^2-4x-6 \ge 0}$

$$\Delta = 16+24 = 40$$

$$x_1 = \frac{4-\sqrt{40}}{2} \qquad x_2 = \frac{4+\sqrt{40}}{2}$$

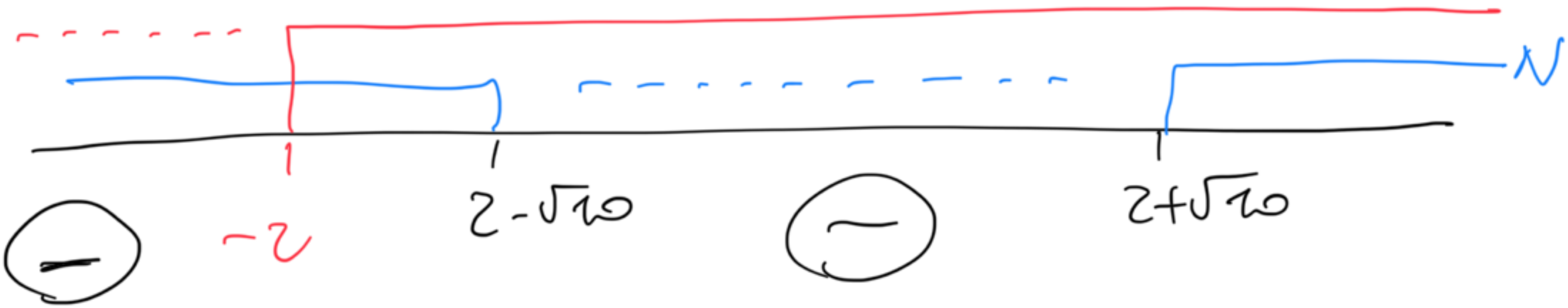
$$x_1 = \frac{4-2\sqrt{10}}{2} \qquad x_2 = \frac{4+2\sqrt{10}}{2}$$

$$x_1 = 2-\sqrt{10} \qquad x_2 = 2+\sqrt{10}$$

Sol $\left]-\infty, 2-\sqrt{10}\right] \cup \left[2+\sqrt{10}, +\infty\right[$

Segno D: $x+2>0 \iff \left]-2, +\infty\right[$

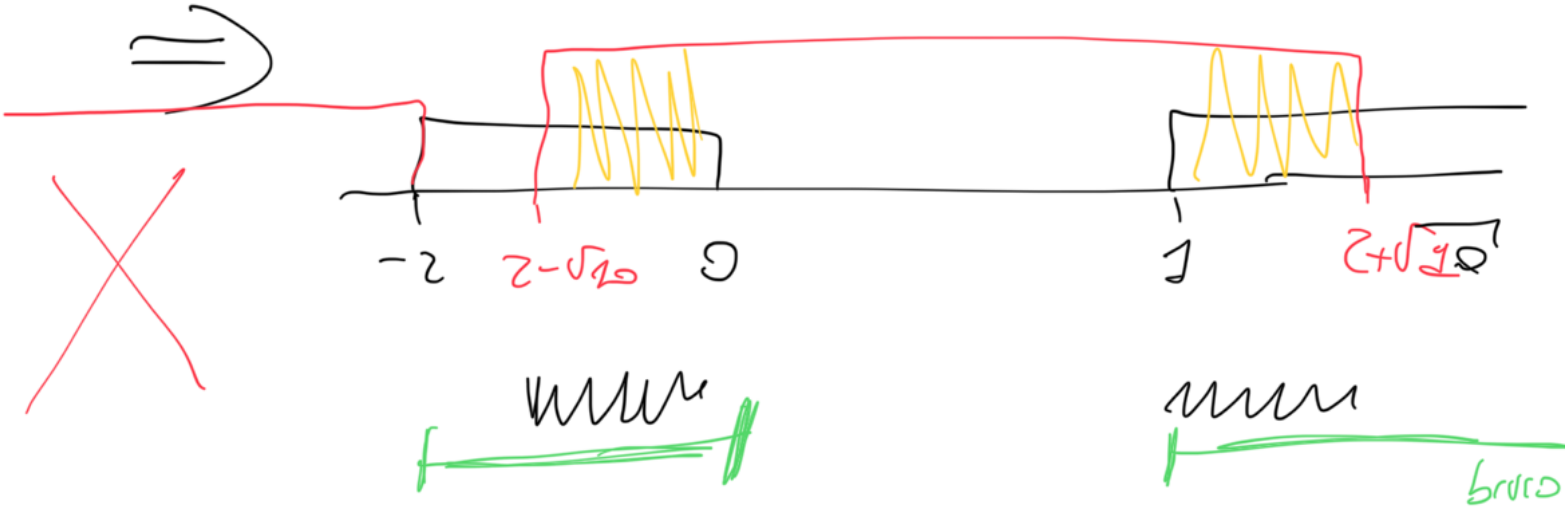
Graficamente



la diseq. è verificata $\cancel{\left]-\infty, -2\right[} \cup \left[2-\sqrt{10}, 2+\sqrt{10}\right]$

essendo stiamo cercando soluzioni in

$$]-2, 0] \cup [1, +\infty[$$



sol 1 $\quad [2-\sqrt{10}, 0] \cup [1, 2+\sqrt{10}]$

Se invece lavoriamo in $]-\infty, -2[\cup]0, 1[$

la diseq. si scrive

$$-\frac{x^2-x}{x+2} \leq 3$$

$$-\frac{x^2-x}{x+2} - 3 \leq 0$$

molt. per (-1)

$$\frac{x^2-x}{x+2} + 3 \geq 0$$

$$\frac{x^2-x+3(x+2)}{x+2} \geq 0$$

segni

$$x^2+2x+6 \geq 0$$

$x+2$

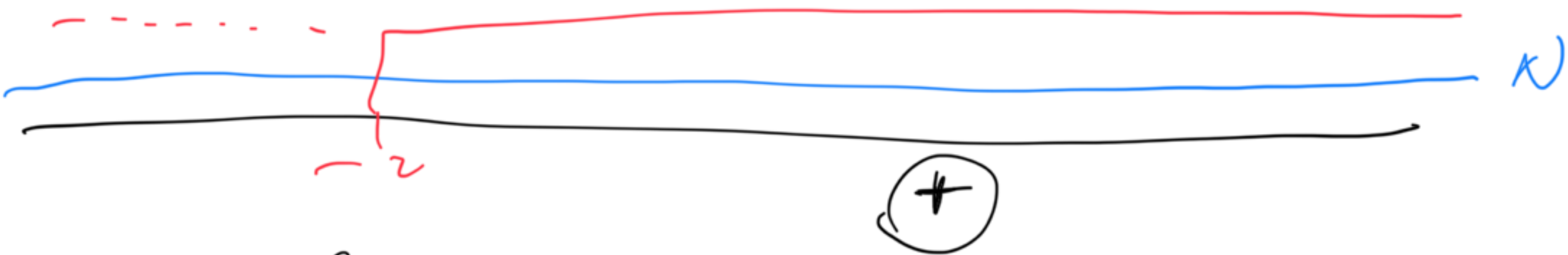
concordi

Segno N: $x^2+2x+6 \geq 0$ $\quad \Delta = 4-24<0$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Segno D: $x+2>0 \iff x>-2$

Graficamente



sol della diseq $]-2, +\infty[$

ma ricordo che vogliamo soluz. in
$]-\infty, -2[\cup]0, 1[$

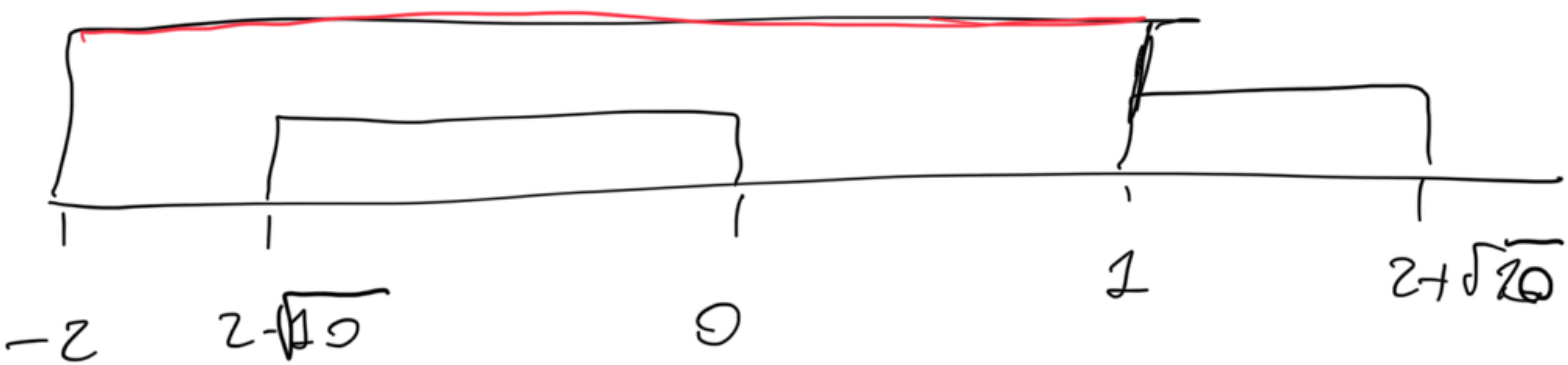
<u>Sol2</u> $]0, 1[$

concludo: $Sol = Sol_1 \cup Sol_2$

$$Sol = [2-\sqrt{10}, 0] \cup [1, 2+\sqrt{10}]$$

$$\cup \;]0, 1[$$

$=$



Sol $\left[2-\sqrt{10},\ 2+\sqrt{10}\right]$

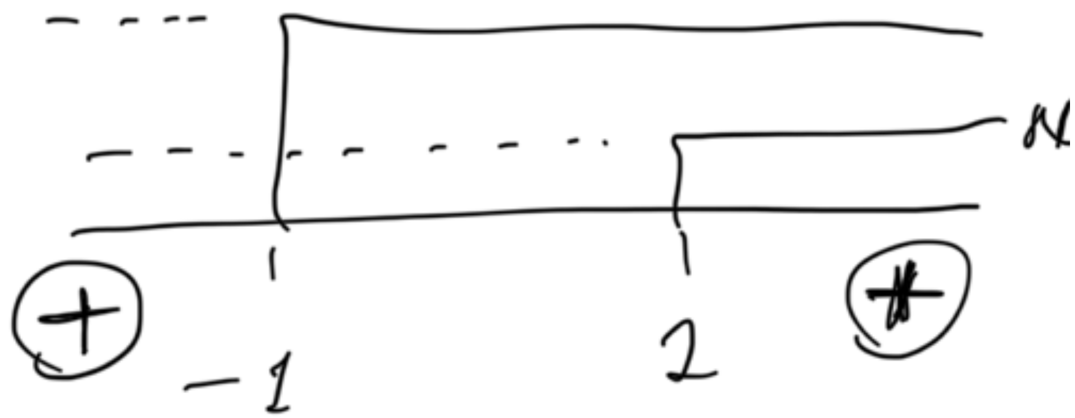
Esempio $\log\left(\frac{x-1}{\;}\right) = 5$

$$\ldots_{\frac{1}{2}}\left(\quad x+1 \right)$$

CE $\quad \dfrac{x-1}{x+1} > 0$

N: $\quad x > 1$

D: $\quad x > -1$



$$\boxed{\text{CE} \quad]-\infty, -1[\ \cup \ ]1, +\infty[}$$

<u>Riscrivo</u>

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 5$$

voglio scriverlo
come $\log_{\frac{1}{2}}(\cdot)$

?

$$z = \log_a a^z$$

$$5 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

sostituisco:

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^5}$$

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{2^5} = 0$$

mcm

$$\frac{2^5(x-1) - (x+1)}{(x+1)\,2^5} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2^5(x-1) - (x+1) = 0$$

$$32x - 32 - x - 1 = 0$$

$$31x - 33 = 0$$

$$x = \frac{33}{31}$$

essendo $\frac{33}{31} > 1 \Rightarrow$ posso accettarla

Sol $x = \frac{33}{31}$

Esempio $\log_{\frac{1}{2}}(3x-2) > 3$

CE $3x-2 > 0$

$$CE \quad \left] \frac{2}{3}, +\infty \right[$$

$$2 = \log_a a^2 \quad \Rightarrow \quad 3 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

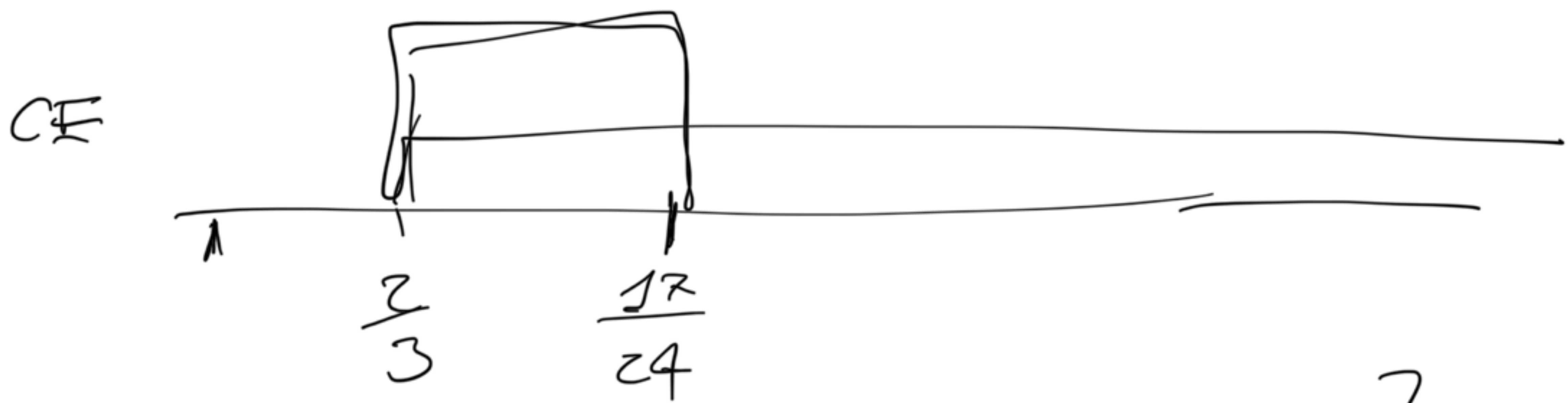
Riscrivo: $\log_{\frac{1}{2}} (3x-2) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$$\Longleftrightarrow \quad 3x-2 < \frac{1}{8}$$

$$3x < 2 + \frac{1}{8}$$

$$3x < \frac{17}{8}$$

$$x < \frac{17}{24}$$



$$\frac{2}{3} < \frac{17}{24} \quad ?$$

$$2 < 3 \cdot \frac{17}{24}$$

24

$$24 \cdot 2 < 3 \cdot 17$$

$$48 < 51 \quad \text{si}$$

Sol $\quad]\frac{2}{3}, \frac{17}{24}[$

Esempio

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(3^{2x} - 3^{x} + 1\right) > 0$$

CE $\quad 3^{2x} - 3^{x} + 1 > 0$

$$(3^x)^2 - 3^x + 1 > 0$$

$t = 3^x \longrightarrow t^2 - t + 1 > 0$

$\Delta = 1 - 4 < 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

$$CE = \mathbb{R}$$

Riscrivo:

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(3^{2x} - 3^{x} + 1\right) > 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(3^{2x} - 3^{x} + 1\right) > \log_{\frac{1}{2}} 1$$

$$3^{2x} - 3^{x} + 1 < 1$$

$$3^{2x} - 3^{x} < 0$$

$$3^{x}\left(3^{x} - 1\right) < 0$$

ma $3^{x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad 3^{x} - 1 < 0$$

$$3^{x} < 1$$

$$3^{x} < 3^{0}$$

$x<0$

sol $]-\infty, 0[$

Esempio

$$(a^2+b^2)^3-(a^3+b^3)^2 =$$

$$= (a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6) -$$

$$-(a^6+2a^3b^3+b^6) =$$

$$= \cancel{a^6}+3a^4b^2+3a^2b^4+\cancel{b^6}-\cancel{a^6}-2a^3b^3-\cancel{b^6}$$

$$= 3a^4b^2+3a^2b^4-2a^3b^3 =$$

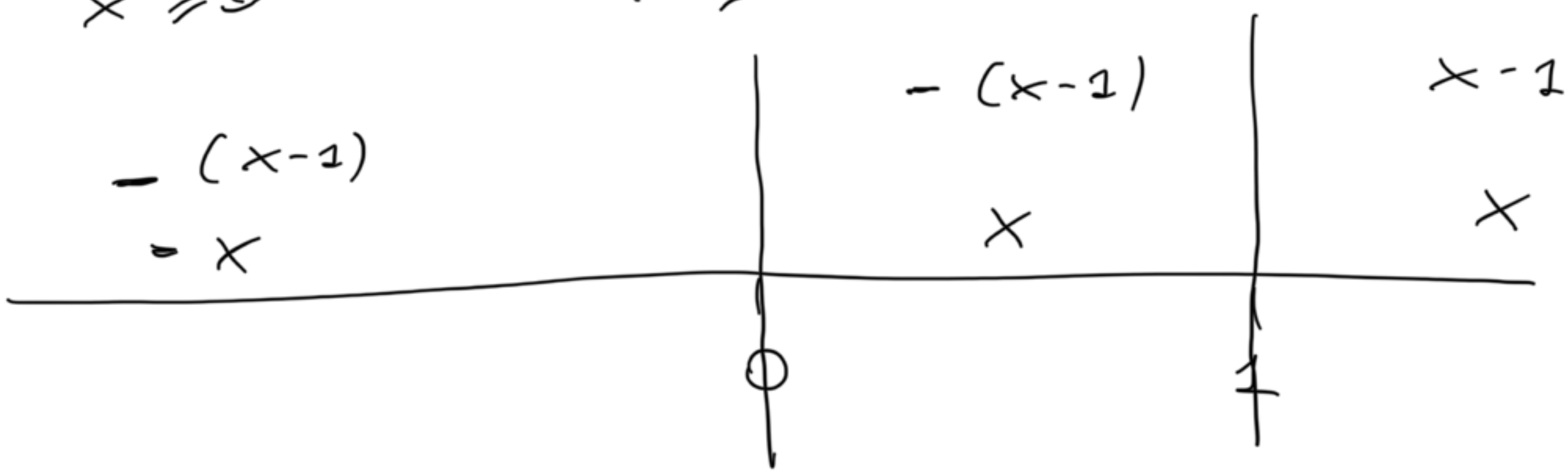
$$= a^2\left(3a^2b^2 + 3b^4 - 2ab^3\right) =$$

$$= a^2b^2\left(3a^2 + 3b^2 - 2ab\right)$$

<u>Esempio</u> $\quad |x-1| < |x|$

$x - 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 1$

$x \geq 0 \qquad\qquad x \geq 0$



$x<0$ $\quad -(x-1) \leq -x \quad (1)$

$0 \leq x < 1$ $\quad -(x-1) \leq x \quad (2)$

$x \geq 1$ $\quad x-1 \leq x \quad (3)$

(1) $\quad -x+1 \leq -x \Rightarrow \cancel{-x}+1+\cancel{x} \leq 0$

$1 \leq 0$ mai

Sol$_1$ $\nexists$ sol

(2) $\quad -x+1 \leq x \rightarrow -x-x+1 \leq 0$

$\rightarrow -2x \leq -1$

$\boxed{x \geq \frac{1}{2}}$

ma $0 \leq x < 1$ $\Rightarrow$ $\underline{Sol_2}$ $[\frac{1}{2}, 1[$

③

$$x - 1 \leq x$$

$$\cancel{x} - 1 - \cancel{x} \leq 0$$

$$-1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\boxed{Sol_3 \quad [1, +\infty[}$

$$\underline{\underline{Sol}} = Sol_1 \cup Sol_2 \cup Sol_3$$

$$= \emptyset \cup [\tfrac{1}{2}, 1[\cup [1, +\infty[$$

$$= [\tfrac{1}{2}, +\infty[$$